

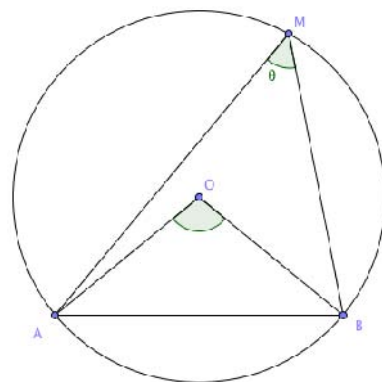
Le théorème de l'angle inscrit et de l'arc capable avec les outils du collège.

1. Le théorème de l'angle inscrit.

Soit un cercle de centre O et une corde AB. Si M est un point du cercle qui regarde la corde AB dans le même sens que O, alors l'angle $\widehat{AOB}$ est le double de l'angle $\widehat{AMB}$.

$\widehat{AMB} = \theta$ est l'angle inscrit,

$\widehat{AOB} = 2\theta$ est l'angle au centre associé.



2. Démonstration.

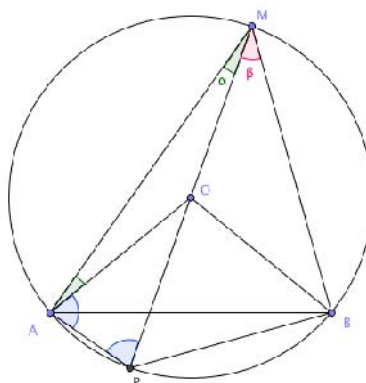
Soit P le point diamétralement opposé à M.

Remarquons les triangles isocèles de sommets O et l'angle droit $\widehat{MAP}$.

$$\widehat{AOP} = \pi - 2 \widehat{OAP} = \pi - 2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = 2\alpha.$$

De même $\widehat{BOP} = 2\beta$.

Ainsi $\widehat{AOB} = 2\alpha + 2\beta = 2\theta$.



3. Cas où N et O sont de part et d'autre de la corde.

L'angle $\widehat{AOB}$ rentrant = $2 \widehat{ANB}$.

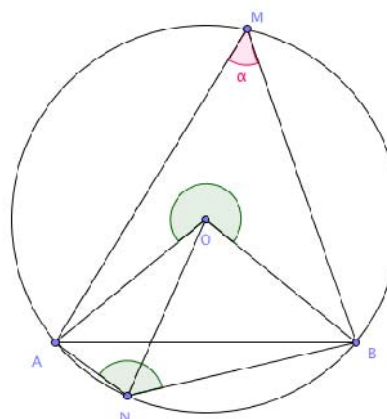
En effet: $2 \widehat{ONA} + \widehat{AON} = \pi$ (i)

et $2 \widehat{ONB} + \widehat{BON} = \pi$ (ii)

En additionnant : $2(\widehat{ONA} + \widehat{ONB}) + \widehat{AON} + \widehat{BON} = 2\pi$

d'où $\widehat{ONA} + \widehat{ONB} = \widehat{ANB} = \pi - \alpha$ d'une part,

et d'autre part l'angle rentrant $\widehat{AOB} = 2\pi - 2\alpha = 2 \widehat{ANB}$.



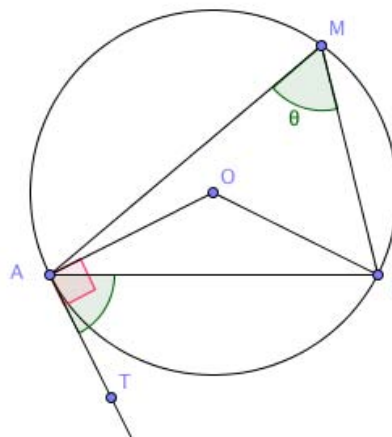
4. Angle de la tangente.

Soit (AT) la demi-droite tangente en A au cercle.

L'angle $\widehat{TAB} = \theta$.

En effet: $\widehat{TAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{OAB}$ et $2 \times \widehat{OAB} + 2\theta = \pi$, d'où :

$$\widehat{TAB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \theta = \theta.$$



5. Le théorème de l'arc capable.

Soit un angle $\theta \in]0; \pi[$ et deux points A et B donnés.

Le lieu $\mathcal{L}$ des points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \theta$, s'appelle arc capable, c'est l'ensemble des points d'où l'on voit le segment [AB] selon un angle θ .

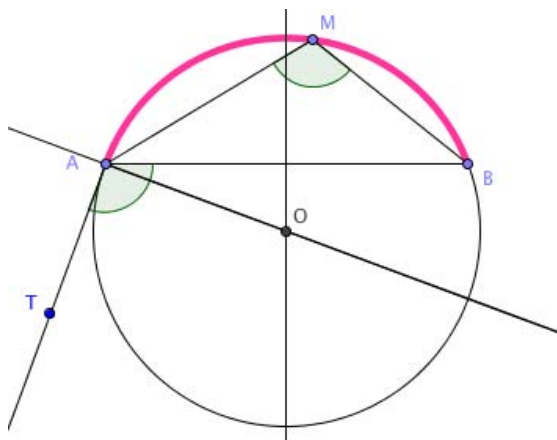
Remarquons que $\mathcal{L}$ par rapport à (AB).

a) $\mathcal{L}$ n'est pas vide.

D'après 4., traçons (AT) tel que $\widehat{TAB} = \theta$.

La perpendiculaire en A rencontre la médiatrice de [AB] en O. Les points M de l'arc de cercle situé dans le demi-plan de frontière (AB), ne contenant pas T, vérifient d'après le théorème de l'angle inscrit $\widehat{AMB} = \theta$.

Donc le lieu cherché $\mathcal{L}$ n'est pas vide.



Remarquons le cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'arc est un

demi-cercle de diamètre [AB] et son symétrique, soit tout le cercle (sauf A et B).

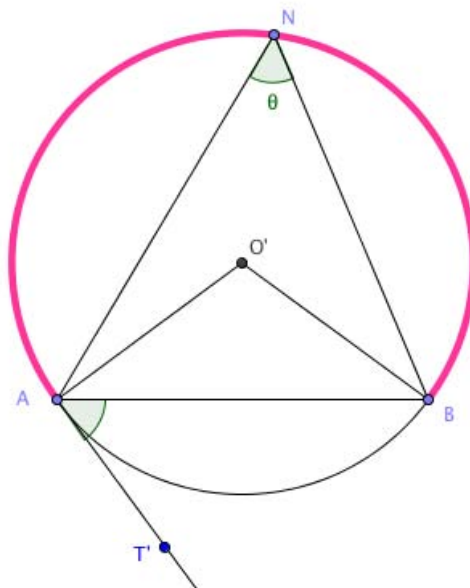
Si $\theta < \frac{\pi}{2}$ alors O et M sont du même côté de la corde et inversement si $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

b) Réciproque.

Tout point N vérifiant $\widehat{ANB} = \theta$, est-il sur un tel arc ?

Soit Γ le cercle circonscrit à ABN, et O' son centre.

D'après 4. $\widehat{T'AB} = \theta$, par suite O et O' sont confondus et le point N est sur le même arc que M (et pas ailleurs).



En conclusion le lieu $\mathcal{L}$ des points M qui voient le segment [AB] selon un angle θ est la réunion des deux arcs capables, symétriques par rapport à (AB) privée des points A et B.

